数理解析研究所講究録 1266 巻 2002 年 125-132

パイこね変換の量子一古典対応について

*井上　啓、**大矢雅則、***I.V.Volovich

*〒 756-0884　山口県小野田市大学通 1-1-1
山口東京理科大学基礎工学部電子・情報工学科
e-mail: inoue@ed.yama.tus.ac.jp
**〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641
東京理科大学理工学部情報科学学科
***Steklov Mathematical Institute
Russian Academy of Sciences
Gubkin St. 8, 117966 Moscow, Russia

概要

量子パイこね変換は量子カオス系の理論的モデルの一つである [2]。ここでは、量子パイこね変換の記号表現 [4] を用いて、量子パイこね変換に従う位置作用素の期待値の時間発展と古典カオス軌道の間の関係を調べる。このとき、量子古典対応が対数時間で壊れる、すなわち、対数時間で古典カオスの特徴を量子系で維持できなくなることを厳密に示す [5]。

1　導入

カオスは、複雑で予測困難な振る舞いを示すが、そこには、隠れた規則が存在していることが知られている。このカオスを用いれば、あるランダムなプロセスを生成することが可能なので、カオスが決定論的な現象と非決定論的な現象 (確率的な現象) を結ぶ役割を果たしている。また、カオスには、初期状態に関する鋭敏性という性質がある。この性質は、2 つの状態が最初は非常に近接しているにも関わらず、時間が経つと全く異なる状態に推移するというものである。すなわち、カオス現象では、最初のわずかな違いが、後の結果に大きな影響を及ぼすため、この性質が長期予測を不可能にしている。

近年、こうしたカオスの量子系における振る舞いを調べるといった量子カオスの研究が行われている。量子カオスの研究の一つに、カオス系の量子古典対応が壊れる時間スケールを見積もるという問題があり、古典カオ

スの特徴である初期値に対する鋭敏性といった性質が量子系に拡張したときに、どの時刻まで維持できるかを調べるものである。特に、量子古典対応の時間スケール T をプランク定数 $\hbar$ に関連した関数 $t_\hbar$ として見積もることが重要な問題である。いままでに、時間スケール T の普遍的な形式は解析的に導出されていないが、多くの数値計算結果から、$T = \frac{1}{\lambda}\log\frac{C}{\hbar}$ となるという予想が報告されている [9, 3]（ただし、λ はリアプノフ指数,C を比例定数である）。

ここでは、量子パイこね変換という量子カオスの理論的なモデルに関して、量子古典対応の関係式を厳密に導出する。すなわち、量子パイこね変換に従う位置作用素のある期待値の時間発展と古典パイこね変換に従う x 軸方向の時間発展の間の対応関係が対数時間で崩れることを示す [5]。

2 古典パイこね変換

古典パイこね変換は、単位平面 $0 \leq q, p, \leq 1$ を単位平面自身に変換するもので、以下の写像で定義される。

$$(q,p) \rightarrow \begin{cases} (2q, p/2), & (0 \leq q \leq 1/2) \\ (2q-1, (p+1)/2), & (1/2 < q \leq 1) \end{cases}$$

この写像は、p 方向 (y 軸方向) に単位平面を押しつぶして、押しつぶされた単位平面を面積を保存するよう q 方向 (x 軸方向) に関して単位平面から飛び出た部分を切り取って、残りの部分の上に載せるという操作に対応している。

この古典パイこね変換は 2 進表現という単純な記述を持っている [1]。この表現において、それぞれの点 (p,q) はドットを持った記号列によって、次のように表される。

$$\xi = \cdots \xi_{-2}\xi_{-1}\xi_0 . \xi_1\xi_2 \cdots \tag{1}$$

ただし、$\xi_k \in 0, 1$ で

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{-k} 2^{-k-1}$$

記号列 ξ に関するパイこね変換の操作は、$U\xi = \acute{\xi}$ によって定義されるシフト写像（Bernoulli shift）U で与えられる。ここでは、$\acute{\xi}_m = \xi_{m+1}$ である。すなわち、古典パイこね変換は、全体の記号列を固定したままの状態

で、時間 1 ステップ毎に、ドットを右側に一つシフトする変換とみなすことができる。m ステップ後には、q 方向の成分は、

$$q_m = \sum_{k=1}^{\infty} = \xi_{m+k} 2^{-k} \tag{2}$$

となる。この関係が初期値

$$q = q_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k} \tag{3}$$

に関する古典軌道を与える。

3 量子パイこね変換

量子パイこね変換は、量子化された単位平面の D 次元ヒルベルト空間上で定義されている [2]。単位平面を量子化するために、それぞれ位置方向と運動量方向に対応する、ワイル形式のユニタリー移動作用素 $\hat{U}$ と $\hat{V}$ を D 次元ヒルベルト空間上に定義する。これらの作用素 $\hat{U}$ と $\hat{V}$ は、次の正準交換関係にしたがっている：

$$\hat{U}\hat{V} = \varepsilon \hat{V}\hat{U},$$

ただし、$\varepsilon = \exp(2\pi i/D)$ である。作用素 $\hat{U}$ と $\hat{V}$ は

$$\hat{U} = e^{2\pi i \hat{q}}, \hat{V} = e^{2\pi i \hat{p}} \tag{4}$$

と書くことができる。整合性を保つために、相空間上における量子スケールを $2\pi\hbar = 1/D$ とする．位置作用素 $\hat{q}$ と運動量作用素 $\hat{p}$ の固有値を反周期的境界条件 [7] に対応させながら、それぞれ $q_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)/D$, $j = 0, \ldots, D-1$, $p_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)/D$, $k = 0, \ldots, D-1$ とする。さらに、ヒルベルト空間の次元 D として、N qubits のヒルベルト空間の次元である $D = 2^N$ を仮定する。

単位平面をモデル化している $D = 2^N$ 次元ヒルベルト空間は、N qubits

$$|q_j\rangle = |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes \otimes \cdots\cdots \otimes |\xi_N\rangle, \tag{5}$$

が定義される直積空間と同一視される。ただし、$j = \sum_{l=1}^{N} \xi_l 2^{N-l}, \xi_l \in \{0,1\}$, であり、それぞれの qubit は基底

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を持つ。q_j を 2 進少数として、$q_j = 0.\xi_1\xi_2\ldots\xi_N 1$ と書くことができる。反周期的境界条件から由来する位相要素 $e^{i\pi/2}$ のため [4]、

$$|.\xi_1\xi_2\ldots\xi_N\rangle = e^{i\pi/2}|q_j\rangle \tag{6}$$

と定義すると、位置作用素と運動量作用素の固有ベクトルは、互いにフーリエ変換を通して関係付けられる： $F|q_k\rangle = |p_k\rangle$.

位置作用素 $|.\xi_{n+1}\ldots\xi_N\xi_n\ldots\xi_1\rangle$ の最も右の n ビットに対してのみフーリエ変換を適用することによって、次の状態の族を得る [4]。

$$\begin{aligned} |\xi_1\ldots\xi_n.\xi_{n+1}\ldots\xi_N\rangle \equiv\ & \frac{1}{\sqrt{2^n}}|\xi_{n+1}\rangle\otimes\cdots\otimes|\xi_N\rangle \\ & \otimes(|0\rangle + e^{2\pi i(0.\xi_1 1)}|1\rangle) \\ & \otimes(|0\rangle + e^{2\pi i(0.\xi_2\xi_1 1)}|1\rangle) \\ & \otimes\cdots \\ & \otimes(|0\rangle + e^{2\pi i(0.\xi_n\ldots\xi_1 1)}|1\rangle), \end{aligned} \tag{7}$$

ただし、$1 \le n \le N-1$ である。与えられた n に対して, これらの状態は、正規直交基底を作る。状態 (7) は、位置と運動量の両方において、局所化される: 幅 $1/2^{N-n}$ の位置領域において局所化され、位置 $q = 0.\xi_{n+1}\ldots\xi_N 1$ となり、幅 $1/2^n$ の運動量領域において同様に局所化され、$p = 0.\xi_n\ldots\xi_1 1$ となる。

いま、n を $0 \le n \le N-1$ とすると、それぞれの n に対して、量子パイこね変換は

$$B_n|\xi_1\ldots\xi_n.\xi_{n+1}\ldots\xi_N\rangle = |\xi_1\ldots\xi_{n+1}.\xi_{n+2}\ldots\xi_N\rangle, \tag{8}$$

によって定義される [4]。すなわち、量子パイこね変換は、ドットの位置を一つ右にシフトする変換で表される。特に、$n = N-1$ に対して、B_{N-1} は、オリジナルの量子パイこね変換である [2]。また、相空間の言葉で説明すれば、量子パイこね変換 B_n は、q 方向に引き伸ばし、p 方向で折り

たたみながら、$(q,p)=(0.\xi_{n+1}\ldots\xi_N 1, 0.\xi_n\ldots\xi_1 1)$ で局所化された状態を $(q',p')=(0.\xi_{n+2}\ldots\xi_N 1, 0.\xi_{n+1}\ldots\xi_1 1)$ で局所化された状態に移す写像とみなすことができる。

以下では、$n=0$ に対する量子パイこね変換 B_0 のみを考察する。量子パイこね変換 B_0 は、次の行列成分を持つユニタリー作用素 T で表される [8]:

$$\langle\xi|T|\eta\rangle=\frac{1-i}{2}\exp\left(\frac{\pi}{2}i|\xi_1-\eta_N|\right)\prod_{k=2}^{N}\delta(\xi_k-\eta_{k-1}), \tag{9}$$

ただし、$|\xi\rangle=|\xi_1\xi_2\ldots\xi_N\rangle$, $|\eta\rangle=|\eta_1\eta_2\ldots\eta_N\rangle$ であり、$\delta(x)$ は、Kronecker symbol, $\delta(0)=0$: $\delta(x)=0, x\neq 0$ である。

4 期待値

ある状態ベクトル $|\xi\rangle$ に関する時刻 $m=0,1,\ldots$ の位置作用素 $\hat{q}$ の期待値:

$$r_m^{(N)}=\langle\xi|T^m\hat{q}T^{-m}|\xi\rangle \tag{10}$$

を考える。ただし、$|\xi\rangle=|\xi_1\xi_2\ldots\xi_N\rangle$ である。

最初に、期待値 $r_m^{(N)}$ の導出結果を示す。このとき、位置作用素 $\hat{q}$ の期待値の力学と相空間上の q 方向の値 q_m (式 (2)) を比較し、量子パイこね変換に対する量子古典対応が対数時間で消失することを示す。

式 (9) によって、$m=0,1,\ldots,N-1$ に対して、

$$\langle\xi\,|T^m|\,\eta\rangle=\left(\frac{1-i}{2}\right)^m\left(\prod_{k=1}^{N-m}\delta\left(\xi_{m+k}-\eta_k\right)\right)\left(\prod_{l=1}^{m}\exp\left(\frac{\pi}{2}i\,|\xi_l-\eta_{N-m+l}|\right)\right) \tag{11}$$

を導くことができる。また、$m=N$ に対しては、

$$\langle T^N\rangle=\left(\frac{1-i}{2}\right)^N\left(\prod_{l=1}^{N}\exp\left(\frac{\pi}{2}i\,|\xi_l-\eta_l|\right)\right) \tag{12}$$

このとき、次の定理が成立する [5]

定理 4.1 $m(0 \le m \le N)$ に対して、

$$r_n^{(N)} = \langle \xi \left| T^m \hat{q} T^m \right| \xi \rangle = \sum_{k=1}^{N-m} \frac{\xi_{m+k}}{2^k} + \frac{1}{2^{N-m+1}} \tag{13}$$

が成立する。また、$m = N$ に対して

$$r_N^{(N)} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

が成立する。

5 時間スケール

この節では、量子パイこね変換の量子古典対応を考察する。$2^N = 1/\hbar$ であるので、極限 $\hbar \to 0$ が極限 $N \to \infty$ に対応する。したがって、定理 4.1 と式 (2) から、$\hbar \to 0$ のとき、量子系における期待値と古典軌道の間に対応関係：

$$\lim_{N\to\infty} r_m^{(N)} = q_m, m = 0, 1, \ldots$$

があることがわかる。また、定理 4.1 と式 (2) から、以下の命題を得る [5]

命題 5.1 $r_m^{(N)}$ を位置作用素の時刻 m での期待値、q_m を古典軌道、すなわち、$q_m = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{m+k} 2^{-k}$ とする。このとき、任意の $m(0 \le m \le N)$ に対して、

$$q_m - r_m^{(N)} = \sum_{j=N-M+1}^{\infty} \xi_{m+j} 2^{-j} - \frac{1}{2^{N-m+1}} \tag{15}$$

が成立する。

さらに、量子における期待値と古典軌道の違いに関して、次の関係式が成立する。[5]

命題 5.2 q_m と $r_m^{(N)}$ を上記の命題と同じであると仮定する。このとき、任意の $\xi = \xi_1 \xi_2 \ldots$ と $m(0 \le m \le N)$ に対して、

$$\left| r_m^{(N)} - q_m \right| \le \frac{1}{2^{N-m+1}} \tag{16}$$

が成立する。

命題5.2は、量子パイこね変換に対する量子古典対応を示した関係式である。$\hbar = 1/2^N$ なので、式(16)は

$$\left| r_m^{(N)} - q_m \right| \leq \frac{1}{2^{N-m+1}} = \hbar 2^{m-1} \tag{17}$$

と書くことができる。特に、$m = 0$ では

$$\left| r_0^{(N)} - q_0 \right| \leq \frac{\hbar}{2} \tag{18}$$

である。ただし、$\xi = \xi_1 \xi_2 \ldots$ である。

いま、$\hbar = 1/2^N$ であり、古典パイこね変換のリアプノフ指数λは$\lambda = 1$であるので、$N = \frac{1}{\lambda} \log_2 \frac{1}{\hbar}$ は対数時間 $t_\hbar$ に対応する。したがって、式(17)は、対数時間 $t_\hbar$ までの量子パイこね変換に対する量子古典対応の厳密な関係式であることを示している。

6　まとめ

ここでは、量子パイこね変換に対する位置作用素の期待値の厳密な計算式を求め、対数時間 $t_\hbar$ までの、量子パイこね変換に対する量子古典対応の関係式を導出した。

今回考察した量子パイこね変換のモデルは、最も量子化が単純なモデルであったので、文献[4]で提案されているより複雑な量子化により導入された量子パイこね変換に対して同様の量子古典対応の関係式を導出したい。また、今回のモデルに対する、対数時間 $t_\hbar$ 以降の時刻の量子パイこね変換に対する位置作用素の期待値と古典軌道の関係については、文献[6]で考察されている。

参考文献

[1] V.M.Alekseev and M.N.Yakobson, *Symbolic dynamics and hyperbolic dynamics systems*, Phys. Rep., **75**, 287-325, 1981.

[2] N.L.Balzas and A.Voros, *The quantized baker's transformation*, Ann. Phys., **190**, 1-31, 1989.

[3] Z.P.Karkuszewski, J.Zakrzewski and W.H.Zurek, *Breakdown of correspondence in chaotic systems: Ehrenfest versus localization times*, nlin.CD/0012048.

[4] R.Schack and C.M.Caves, *Shifts on a finite qubit string: A class of quantum baker's map*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **AAECC 10**, 305-310, 2000.

[5] K.Inoue, I.V.Volovich and M.Ohya, *On quantum-classical correspondence for baler's map*, quant-ph/0108107, 2001.

[6] K.Inoue, I.V.Volovich and M.Ohya, *Semiclassical properties and chaos degree for the quantum baker's map*, J. Math. Phys., Vol.43, No.2, 734-755, 2002.

[7] M.Saraceno, *Classical structures in the quantized baker transformation*, Ann. Phys., **199**, 37-60, 1990.

[8] A.N.Soklakov and R.Schack, *Classical limit in terms of symbolic dynamics for the quantum baker's map*, Phys. Rev. E, **61**, 5108-5114, 2000.

[9] W.H.Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, quant-ph/0105127.